Prof. Dr. Martin Przewloka

Hausaufgaben + Lösungen (Blatt 7 Sommersemester):

1. Man berechne das nachfolgende unbestimmte Integral mit der Substitutionsregel:

$$\int_1^4 \frac{\cos(a\sqrt{x})}{\sqrt{x}}\,dx = ?$$

   a.) einfache Variante: Rechnen Sie mit $a=4$
   b.) schwierigere Variante (Klausurschwierigkeitsgrad): Rechnen Sie mit a als Parameter

Lösung wird nur für b.) angeführt, da damit Fall a.) automatisch enthalten ist:

Man ersetze: $z = a\sqrt{x}$ und erhält somit für $\frac{dz}{dx} = \frac{a}{2\sqrt{x}}$ bzw. $dx = \frac{2\sqrt{x}}{a}dz$

Einsetzen in das Integral mit neuen Grenzen liefert:

$$\int_1^4 \frac{\cos(a\sqrt{x})}{\sqrt{x}}\,dx = \int_a^{2a} \frac{\cos z}{\sqrt{x}}\frac{2\sqrt{x}}{a}\,dz = \int_a^{2a} 2\frac{\cos z}{a}\,dz = \frac{2}{a}\sin z\Big|_a^{2a} = \frac{2}{a}(\sin 2a - \sin a)$$

2. Man berechne unter Anwendung der partiellen Integration:

$$\int_0^1 (x-1)e^x\,dx = ?$$

Man wähle: $u = x-1$ und $v' = e^x$ und erhält somit für $u' = 1$ sowie $v = e^x$.
Damit ergibt sich mit Hilfe der Formel der Partiellen Integration:

$$\int_0^1 (x-1)e^x\,dx = (x-1)e^x\Big|_0^1 - \int_0^1 e^x\,dx = (x-1)e^x\Big|_0^1 - e^x\Big|_0^1 = (x-2)e^x\Big|_0^1 = -e-2$$

3. Gesucht sind 4 Zahlen mit der Eigenschaft, dass ihr Produkt maximal wird. Dabei gelten die folgenden zusätzlichen Randbedingungen:
   a.) Die Summe aller Zahlen ist 40
   b.) 2 Zahlen sind identisch
   c.) Eine der Zahlen ist doppelt so groß wie eine andere

Hauptbedingung: $ABCD = Max$. Nebenbedingungen: $A+B+C+D = 40$; $A = B$ und $C = 2D$
Das System lässt sich direkt mit dem Lagrangeverfahren lösen, oder man vereinfacht kurz zu:
$A^2 2D^2 = Max$. Nebenbedingung: $2A+3D = 40$; -> Lagrangefunktion: $L = 2A^2D^2 + \lambda(40-2A-3D)$
und somit $L_A = 4AD^2 - 2\lambda = 0$ bzw. $\lambda = 2AD^2$; $L_D = 4DA^2 - 3\lambda = 0$ -> $4DA^2 - 6AD^2 = 0$
-> $4A = 6D$ bzw. $2A = 3D$ -> Einsetzen in Nebenbedingung liefert $6D = 40$ bzw. $D = \frac{20}{3}$. Die restlichen Zahlen ergeben sich dann wie folgt: $A = 10$; $B = 10$; $C = \frac{40}{3}$

4. Man löse das Maximierungsproblem:

$Max: f(x,y) = \sqrt{xy}$

unter der Nebenbedingung:

$5x + 25y = 1000$

Direktes Aufstellen der Lagrangefunktion liefert:

$$L = \sqrt{xy} + \lambda(1000 - 5x - 25y) \;\text{->}\; L_x = \frac{y}{2\sqrt{xy}} - 5\lambda = 0 \text{ bzw. } \lambda = \frac{y}{10\sqrt{xy}} \text{ sowie } L_y = \frac{x}{2\sqrt{xy}} - 25\lambda = 0$$

Hieraus folgt: $\frac{x}{2\sqrt{xy}} - 2{,}5\frac{y}{\sqrt{xy}} = 0$ oder $x = 5y$. Damit ergibt sich: $y = 20$ sowie $x = 100$.